Soit la fonction $f$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, d'expression

$$f(x) = 6 - x - \mathrm{e}^{-x}.$$

Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Étudier la limite de $f$ en $+\infty$.

   **b.** Montrer que $f(x)$ peut se mettre sous la forme $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(6\mathrm{e}^{x} - x\mathrm{e}^{x} - 1\right)$. On admet que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$. En déduire la limite de $f$ en $-\infty$.
2. **a.** Démontrer que la droite $\Delta$ d'équation $y = -x + 6$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

   **b.** Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite $\Delta$.
3. On note $f'$ la fonction dérivée de $f$ sur R.

   **a.** Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ peut se mettre sous la forme $f'(x) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}}$.

   **b.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $1 - \mathrm{e}^{x} \geqslant 0$.

   **c.** En déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de $f$.
4. Soit $\Delta'$ la parallèle à $\Delta$ passant par l'origine.
   Calculer les coordonnées du point d'intersection N de $\Delta'$ et de $\mathscr{C}_f$.
5. Déterminer une équation de la droite $\mathscr{T}$ tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-\ln(6)$.
6. En utilisant une feuille de papier millimétré, tracer dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites $\Delta$, $\Delta'$ et $\mathscr{T}$. On prendra comme unité graphique 1 cm sur chacun des axes.
7. Soit la fonction $F$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, d'expression

$$F(x) = 6x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{e}^{-x}.$$

   **a.** Montrer que $F$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.

   **b.** Hachurer sur le graphique le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = -\ln(6)$ et l'axe des ordonnées.

   **c.** Calculer l'aire $\mathscr{A}$ en cm$^2$ de la partie hachurée.
   On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie de $\mathscr{A}$ au dixième de cm$^2$.