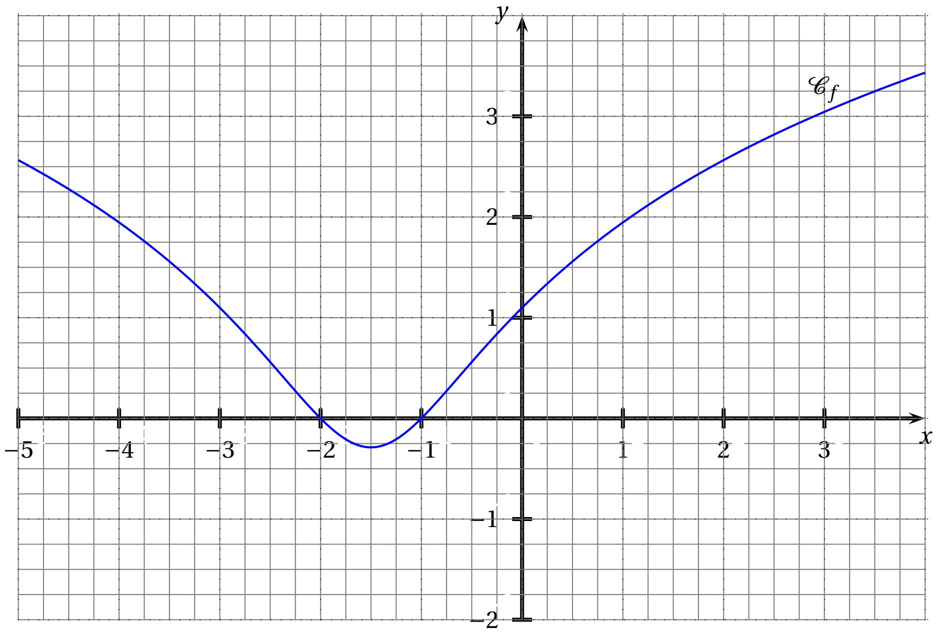
Ce problème a pour but d'étudier la position relative des courbes représentatives de deux fonctions. On note ln la fonction logarithme népérien.

**Partie A. Détermination d'une fonction *f***

On donne ci-dessous, dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm, la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction $f$ définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

On suppose que la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par les points A de coordonnées 0 ; ln3), B de coordonnées $(-1~;~0)$ et C de coordonnées $(-2~;~0)$.

**1.** On admet qu'il existe trois nombres réels $a$, $b$ et $c$ tels que, pour $x$ réel, $f(x) = \ln\left(ax^2 + bx + c\right)$.
Calculer $a$, $b$ et $c$.




(Ce graphique n'est pas à l'échelle.)

**2.** On admet que la fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2 + 3x + 3\right)$ et on désigne par $f'$ sa fonction dérivée.

**a.** Déterminer $f'(x)$ pour tout $x$ réel.

**b.** Démontrer que la fonction $f$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

**c.** Déterminer la valeur exacte de ce minimum.

**Partie B. Étude d'une fonction *g***

On considère la fonction $g$ définie sur l'intervalle $[-1~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln\left(\frac{10x + 11}{x + 2}\right).$$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction $g$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, du plan $\mathcal{P}$ et $g'$ sa fonction dérivée sur l'intervalle $[-1~;~+\infty[$

**1.** **a.** Calculer $g(-1)$.

**b.** Déterminer la limite de la fonction $g$ en $+\infty$.
En déduire que la courbe $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote $D$ dont on donnera une équation.

**2.** **a.** En remarquant que, pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $[-1~;~+\infty[$ :

$$g(x) = \ln(10x + 11) - \ln(x + 2),$$

justifier que :

$$g'(x) = \frac{9}{(10x + 11)(x + 2)}.$$

**b.** Établir le tableau de variations de la fonction $g$.

**Partie C. Étude des positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$**

1. On pose, pour tout $x$ réel, $P(x) = x^3 + 5x^2 - x - 5$.
   - **a.** Vérifier que, pour tout $x$ réel, $P(x) = \left(x^2 - 1\right)(x+5)$. tout
   - **b.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
   - **c.** Étudier le signe de $P(x)$ pour tout $x$ réel.
2. On rappelle que la fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln\left(x^2 + 3x + 3\right)$ et que la fonction $g$ est définie sur l'intervalle $[-1\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = \ln\left(\dfrac{10x+11}{x+2}\right)$.
   - **a.** En utilisant (es résultats de la question C. 1. b., résoudre dans l'intervalle $[-1\ ;\ +\infty[$ l'équation $f(x) = g(x)$.
   - **b.** En déduire les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $[-1\ ;\ +\infty[$.
3. 
   - **a.** En utilisant les résultats de la question C. 1. c, résoudre dans l'intervalle $[-1\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$.
   - **b.** En déduire selon les cas la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $[-1\ ;\ +\infty[$ ;
4. Sur le graphique de la partie A, tracer la droite $D$ et la courbe $\mathscr{C}_g$.