Partie A Étude de la fonction g.

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x+1}.$$

1. a. Calculer $g(0)$.

   b. Vérifier que $g(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x} \times \frac{x}{x+1}$, lorsque $x > 0$.
   En déduire la limite de g en $+\infty$.

2. Soit g' la fonction dérivée de g.

   a. Montrer que $g'(x) = \frac{x\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}$ et étudier son signe sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

   b. En déduire le tableau de variations de g sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

Partie B Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x+1} + \ln x.$$

1. En remarquant que $f(x) = g(x) + \ln x$, déterminer à l'aide de la partie A :

   a. la limite de f en 0. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

   b. la limite de f en $+\infty$.

   c. Déterminer, en le justifiant, le sens de variation de f et en déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

2. On admet qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
   Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie C Tracé.

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f et Γ celle de g dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 2 cm).

1. a. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$, en déduire les coordonnées du point d'intersection Ω des courbes $\mathscr{C}$ et Γ.

   b. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et de Γ.

2. Tracer les courbes $\mathscr{C}$ et Γ dans le repère $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ et placer le point Ω.