Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x} - \ln x.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$; la courbe $\mathscr{C}$ est donnée en annexe.

Partie A - Étude de la fonction *f*

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. On rappelle le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$.
   a. En remarquant que $f(x) = \dfrac{2x - 1 - x\ln x}{x}$ déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.
   b. En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ et en donner une équation.
3. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ on a : $f'(x) = \dfrac{1-x}{x^2}$.
   b. Déterminer le tableau des variations de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. Indiquer la valeur de l'extremum.
4. a. Démontrer que, sur l'intervalle $[0{,}1\,;\,10]$, la fonction f s'annule pour deux valeurs exactement. On note x_1 et x_2 ces deux valeurs, avec $x_1 < x_2$.
   b. Placer x_1 et x_2 sur l'axe $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath}\right)$ représenté sur la feuille annexe, et donner les valeurs approchées arrondies au centième de ces deux nombres.

Partie B - Étude d'une tangente

On désigne par $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 2.

1. Démontrer qu'une équation de la droite $\mathscr{T}$ est : $y = -\dfrac{1}{4}x + 2 - \ln 2$.
2. On considère la fonction h définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$h(x) = f(x) - \left(-\frac{1}{4}x + 2 - \ln 2\right).$$

   a. Calculer $h'(x)$ et vérifier que pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on a : $h'(x) = \dfrac{(x-2)^2}{4x^2}$.
   b. En déduire le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   c. Calculer $h(2)$ et en déduire le signe de la fonction h sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
3. À l'aide des questions précédentes, déterminer la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la tangente $\mathscr{T}$.
4. Tracer la droite $\mathscr{T}$ sur la feuille annexe en tenant compte du résultat obtenu dans la question précédente.

Annexe : tracé de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans le repère orthogonal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$

Cette feuille est à compléter au fil des questions et à rendre avec la copie