Partie I : étude d'une fonction auxiliaire
Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = 1 - \ln x + 2x^2.$$

1. Montrer que

$$g'(x) = \frac{(2x+1)(2x-1)}{x}.$$

2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$.
Dresser le tableau de variation de la fonction g (sans les limites).

3. En déduire que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$, $g(x)$ est strictement positif.

Partie II : étude de la fonction *f*
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + 2x - 3.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Étudier la limite de f en 0. En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.

2. Étudier la limite de f en $+\infty$ et démontrer que la droite Δ d'équation $y = 2x-3$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

3. Montrer que pour tout nombre réel x strictement positif, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

4. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

5. Soit A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse e et B le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $\sqrt{\text{e}}$.

- **a.** Donner les valeurs arrondies au centième des coordonnées des points A et B.
- **b.** En déduire que la fonction f est positive sur l'intervalle $[\sqrt{\text{e}}~;~\text{e}]$.

6. Tracer la droite Δ et la courbe $\mathcal{C}$. Placer les points A et B.

7.
- **a.** Démontrer qu'au point A, la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à la droite Δ.
- **b.** Le point A est-il le seul point de la courbe $\mathcal{C}$ admettant une tangente parallèle à la droite Δ ?