Partie A : Étude sommaire d'une fonction g

On considère la fonction g définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$g(x) = \mathrm{e}^{x^3-x-5}.$$

La courbe représentative de la fonction g est notée $\mathscr{C}$ et est représentée sur la feuille annexe.
Le dessin suggère que g est croissante sur $\mathbb{R}$. On se propose dans cette partie de confirmer ou d'infirmer cette impression.

1. Déterminer $g'(x)$ pour tout nombre réel x.
2. Étudier selon les valeurs du nombre réel x le signe de $P(x) = 3x^2 - 1$.
3. Justifier que $g'(x)$ et $P(x)$ sont de même signe pour tout nombre réel x.
4. En déduire le tableau de variations de g. (L'étude des limites n'est pas demandée.)
5. Que penser des variations de g suggérées par le dessin ?

Partie B : Étude de quelques propriétés d'une fonction f

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = -x\ln x + \frac{1}{3}x + 1.$$

La courbe représentative de f est notée Γ, cette courbe est représentée sur la feuille annexe.

1. Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$,
   $f'(x) = -\ln x - \dfrac{2}{3}$.
2. Résoudre dans l'intervalle $]0~;~+\infty[$, l'inéquation $f'(x) > 0$.
3. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$. (On ne demande pas de calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.)

Partie C ; Résolution de l'équation $f(x) = g(x)$ sur l'intervalle $[1~;~2]$

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[1~;~2]$ par $h(x) = g(x) - f(x)$.

1. Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1~;~2]$,
   $h'(x) > 0$.
2. En déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, appartenant à l'intervalle $[1~;~2]$.
3. Donner la valeur approchée arrondie au centième de cette solution.

Feuille annexe à compléter et à rendre avec la copie