Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées. On s'intéresse, dans ce problème, à la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} - x + 2.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = 1 - \ln x - x^2.$$

1. Calculer $g'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. En déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B : étude de la fonction f

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 0. Interpréter graphiquement cette limite.

   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   c. Justifier que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

   d. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.
2. **a.** Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$,
   $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

   b. Établir le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
3. **a.** Déterminer les coordonnées du point A de la courbe $\mathscr{C}$ tel que la tangente en ce point soit parallèle à l'asymptote $\mathscr{D}$.

   b. Déterminer une équation de la droite $\mathscr{T}$, tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse e.

   On rappelle que e est le nombre réel tel que $\ln \mathrm{e} = 1$.
4. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0\ ;\ 1[$.

   On appelle B le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse α.

   b. Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de α.
5. Dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, placer les points A et B puis tracer les droites $\mathscr{D}$, $\mathscr{T}$ et la courbe $\mathscr{C}$.