La fonction f est définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = a\frac{\ln x}{x} + b,$$

où a et b sont deux nombres réels à déterminer.
f' désigne la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de cette fonction f, dans un repère orthononné $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan d'unité graphique 2 cm.
On a représenté la courbe $\mathscr{C}$, sur la feuille annexe.
La droite T est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point de coordonnées (1 ; 2) ; elle coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées (0 ; 1).

Partie A : recherche de l'expression de $f(x)$

En utilisant le graphique de la feuille annexe,

1. Préciser (sans justifier) les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
2. Déterminer $f'(x)$, en fonction de la variable x, du nombre réel a et du nombre réel b si besoin.
3. Utiliser les deux questions précédentes pour déterminer les valeurs de a et b.

Partie B : étude de la fonction f

Dans la suite du problème, la fonction f est définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

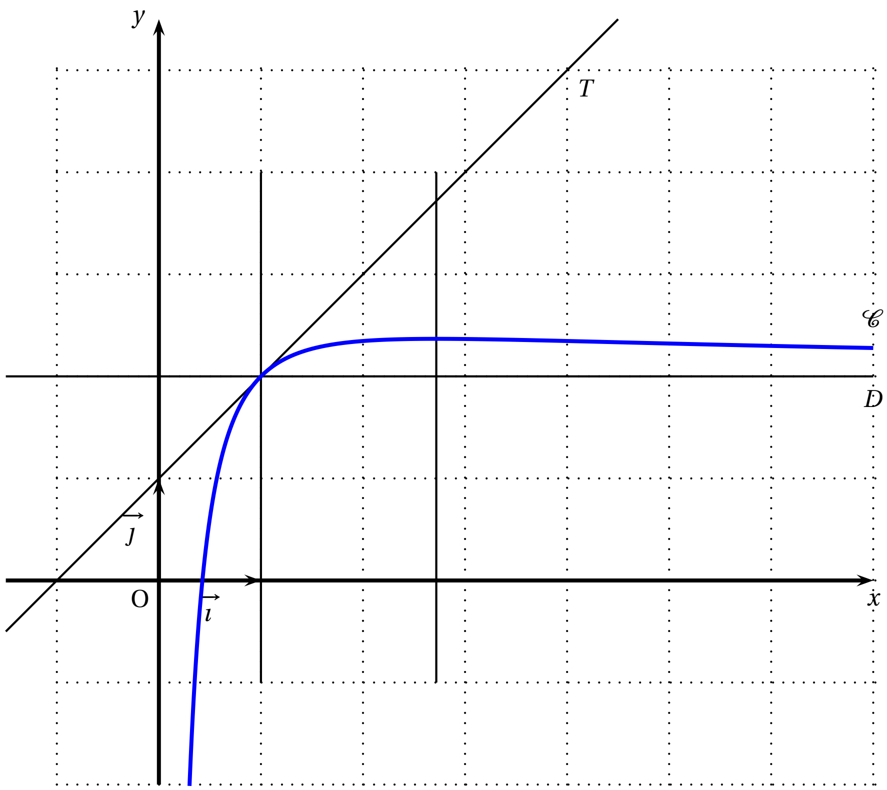
$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + 2.$$

1. Déterminer, par le calcul, la limite de $f(x)$ en O.

   En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ dont on donnera une équation.
2.
   a. Démontrer, par le calcul, que la droite D, d'équation, $y = 2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

   b. Étudier par le calcul, la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite D sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   c. Tracer la droite D sur la feuille annexe.
3. Déterminer $f'(x)$.
4. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f en justifiant avec soin le signe de $f'(x)$.



y
T
$\mathscr{C}$
D
$\vec{\jmath}$
O
$\vec{\imath}$
x