La fonction f est définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = a\ln x + bx + \frac{c}{x}$$

où a, b et c sont trois nombres réels à déterminer. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
On a représenté la fonction f sur la feuille annexe dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de cette fonction f.
On note T la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1. La tangente T passe par l'origine O du repère.
La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses.

PARTIE A
Recherche de l'expression de $f(x)$

1. Préciser (sans justifier) les valeurs de $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
2. Déterminer $f'(x)$, en fonction de la variable x et des nombres réels a, b et c.
3. Exprimer $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$ en fonction des nombres réels a, b et c.
4. En utilisant les réponses aux questions 1. et 3., montrer que les nombres réels a, b et c sont solutions du système S suivant :

$$S : \left\{\begin{array}{rcl} b+c &=& 1\\ a+b-c &=& 1\\ 2a+4b-c &=& 0 \end{array}\right.$$

5. Résoudre le système S. En déduire une expression de $f(x)$.

PARTIE B
Étude de la fonction f

Dans la suite du problème la fonction f est définie sur l'intervalle $]0~;~\infty[$ par :

$$f(x) = 8\ln x - 3x + \frac{4}{x}.$$

1. Déterminer par calculs la limite de f en $+\infty$ (on peut factoriser $f(x)$ par x).
2. On rappelle que : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$.
   En écrivant $f(x)$ sous la forme d'une seule fraction, déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Déterminer $f'(x)$ et vérifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0~;~\infty[$:

$$f'(x) = \frac{(3x-2)(2-x)}{x^2}.$$

   Dresser le tableau de variations complet de la fonction f (justifier avec soin le signe de $f'(x)$.)
   Montrer que, sur l'intervalle $[4~;~5]$ l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution. notée α.
   Justifier l'encadrement de la solution α d'amplitude 10^{-1} suivant :

$$4,07 < \alpha < 4,08.$$

Feuille annexe