Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} + 2x.$$

**1.** Soit $h$ la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$h(x) = 1 - \ln x + 2x^2.$$

**a.** On note $h'$ la fonction dérivée de $h$.
Montrer que $h'(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{x}$ puis déterminer le signe de $h'(x)$ pour $x$ dans $]0~;~+\infty[$.

**b.** Calculer $h\left(\dfrac{1}{2}\right)$ puis dresser le tableau de variations de $h$.
On ne déterminera pas les limites de $h$ aux bornes de son ensemble de définition.

**c.** En déduire le signe de $h(x)$ pour $x$ dans l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

**2. a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to 0 x > 0} f(x)$. Que peut-on en déduire graphiquement ?

**b.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

**c.** Montrer que pour tout $x > 0,\ f'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$ puis dresser le tableau de variations de $f$.

**3. a.** Montrer que la droite $\Delta$ d'équation $y = 2x$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$.

**b.** Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\Delta$.

**4.** Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

**5.** Tracer la courbe $\mathscr{C}$, et les droites $\mathscr{T}$ et $\Delta$ dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

**6.** Soit $G$ la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $G(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

**a.** Démontrer que $G$ est une primitive de la fonction $g$ définie sur $]0~;~+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

**b.** Hachurer la partie du plan délimitée par les droites d'équation $x = 1$,
$x = \text{e}$, la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses.

**c.** Calculer, en cm$^2$, la valeur exacte de l'aire de cette partie hachurée.