Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, en prenant pour unité graphique 2 cm.
Sur la **feuille annexe jointe, à rendre avec la copie**, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = a\ln x + \frac{b}{x} + c,$$

où $a,\ b$ et c désignent trois nombres réels.
On a également placé les points A et B de coordonnées respectives $(0\ ;\ \ln 2 - 2)$ et $(-4\ln 2 + 8\ ;\ 0)$ dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. **a.** Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et de $f'(1)$.
   b. Sachant que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2, calculer $f'(2)$.
2. **a.** Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de a et b.
   b. Montrer que a, b et c sont solutions du système $\left\{\begin{array}{lcr} b+c & = & -1 \\ a-b & = & 0 \\ 2a-b & = & 1 \end{array}\right.$.
   c. Calculer a, b et c. En déduire l'expression de $f(x)$.

Partie B

Dans toute la suite du problème, on admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 2.$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. On admet que $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
4. La courbe $\mathscr{C}$ semble couper l'axe des abscisses sur l'intervalle $[6\ ;\ 7]$.
   Prouver ce résultat, puis donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de l'abscisse du point d'intersection.

Partie C

On désigne par Γ la courbe représentative de la fonction logarithme népérien dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées du (ou des) pointes) d'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et Γ.
2. Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et Γ.
3. Tracer la courbe Γ sur la feuille annexe, à rendre avec la copie.
4. **a.** Hachurer la partie du plan comprise entre les courbes $\mathscr{C}$, Γ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.
   b. Calculer la mesure exacte, en unités d'aire, de l'aire $\mathscr{A}$ de la partie hachurée.
   c. En déduire, en cm^2, la mesure arrondie au centième de l'aire $\mathscr{A}$.

Problème

Annexe, à rendre avec la copie