Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A : Étude d'une fonction f

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par :

$$f(x) = 1 + \ln(2x+1)$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. La courbe $\mathscr{C}$ est donnée en annexe pour aider le candidat et lui permettre de vérifier ses réponses.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $-\frac{1}{2}$ et en donner une interprétation graphique.

   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

   a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

   b. Étudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.

   c. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on a $f(x) \geqslant 1$.

3. **a.** Résoudre dans l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ l'équation : $1 + \ln(2x+1) = 0$.

   b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec chacun des axes du repère.

Partie B : Étude d'une fonction g

Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note Γ la courbe représentative de g dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer la limite de g en $-\infty$.

   b. Déterminer la limite de g en $+\infty$. Donner une interprétation graphique de cette limite.

2. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

   a. Démontrer que, pour tout réel x, $g'(x) = -x\mathrm{e}^{-x}$.

   b. Étudier le signe de $g'(x)$ selon les valeurs du réel x et dresser le tableau de variation de la fonction g.

3. Vérifier que, pour tout réel x, on a $g(x) \leqslant 1$.

4. Tracer la courbe Γ dans le même repère que la courbe $\mathscr{C}$ sur la feuille donnée en annexe.

Partie C : Calcul d'aire

1. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$F(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln(2x+1).$$

a. Démontrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur cet intervalle.

b. Calculer l'intégrale $I_1 = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. On considère la fonction G définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :
$G(x) = (-x-2)\mathrm{e}^{-x}$.
On admet que la fonction G est une primitive de g sur $[0~;~+\infty[$.
Calculer l'intégrale $I_2 = \displaystyle\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$.

3. **a.** Démontrer, en utilisant des résultats établis dans les parties A et B, que la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la courbe Γ sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

b. Hachurer sur le graphique la partie $\mathscr{P}$ du plan délimitée par la courbe Γ, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

c. Déduire de ce qui précède la valeur exacte de l'aire de la partie $\mathscr{P}$ exprimée en unités d'aire.

Annexe : À rendre avec la copie