On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\ln x}{x} - 2x + 4.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
L'unité graphique est 2 cm sur chacun des axes.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On note g la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - \ln x - x^2$$

1. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ (les limites ne sont pas demandées).
2. Étude du signe de g
   a. Calculer $g(1)$.
   b. En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B : Étude de la fonction *f*

1. Étude des limites
   a. Déterminer la limite de f en 0. Que peut-on déduire graphiquement pour la courbe $\mathscr{C}$?
   b. Déterminer la limite de f en ∞.
2. Étude d'une asymptote
   a. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -2x+4$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.
   b. Déterminer la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.
3. On désigne par f' la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   a. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, puis démontrer que : $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{x^2}$.
   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$,
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
4. Démontrer qu'il existe une tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ qui est parallèle à la droite $\mathscr{D}$.
5. Construire dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ les droites $\mathscr{T}$ et $\mathscr{D}$, puis la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C : Calcul d'une aire

1. Calculer $f(2)$ et en déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[1\ ;\ 2]$.
2. On note F la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$F(x) = (\ln x)^2 - x^2 + 4x.$$

   a. Démontrer que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   b. On note $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en cm^2, du domaine plan compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.
   Déterminer la valeur exacte de $\mathscr{A}$ puis en donner la valeur arrondie au mm^2.