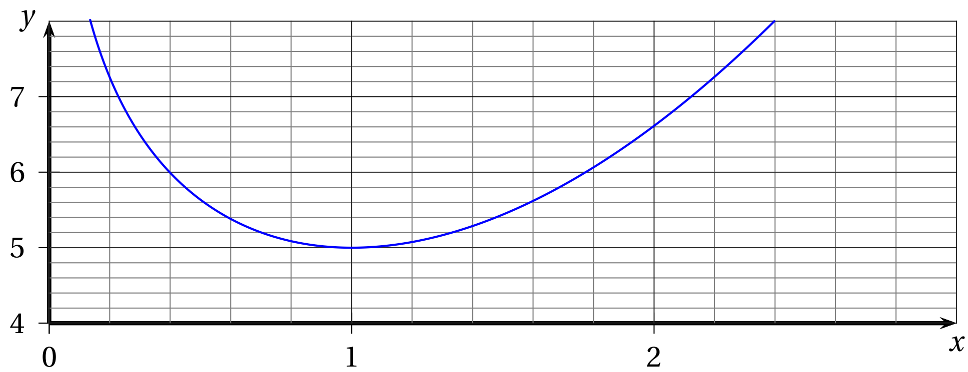
Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $\text{I} =]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x^2 - 2\ln(x) + 4$$

et dont la représentation graphique est donnée ci-après.

1. Soit g' la dérivée de g sur l'intervalle I. Montrer que $g'(x) = 2\dfrac{x^2-1}{x}$.
2. Dresser le tableau de variations de g sur I
3. En déduire le signe de $g(x)$ sur I.



Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle I, par

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{\ln(x) - 1}{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Étudier la limite de f en $+\infty$ et en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

   b. Étudier la limite de f en 0 en remarquant que $f(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln(x)}{x}$.
2. On note f' la dérivée de f.

   a. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle I, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$.

   b. En utilisant la partie A donner le signe de $f'(x)$. En déduire que la fonction f est croissante sur I.

   c. Calculer $f(1)$ et en déduire le signe de $f(x)$ sur I.
3. Construire sur une feuille de papier millimétré, la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ en prenant comme unité graphique 2 cm.

Partie C

On considère la fonction F, définie et dérivable sur l'intervalle I, d'expression :

$$F(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}[\ln(x) - 1]^2.$$

1. Vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f définie à la partie B.
2. Dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, tracer la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = \text{e}$.
   Hachurer la partie du plan située au dessus de l'axe des abscisses et délimitée par $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.
3. Que représente le nombre $A = 4\,[F(\text{e}) - F(1)]$.
   Calculer la valeur exacte de A, puis sa valeur arrondie au centième .