

\mathcal{C}_2 désigne la courbe représentant la fonction f définie, pour tout x de l'intervalle $[1 ; 5]$, par :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - 4\ln x.$$

Archibald Nikolaüs veut faire dorer à la feuille d'or la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C}_2 les droites d'équation $x = 1$ et $x = 5$.

1. Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $[1 ; 5]$ par

$$F(x) = \frac{1}{6}x^3 - 4x\ln x + 5x$$

est une primitive de f .

2. En déduire la valeur exacte de l'intégrale $I = \int_1^5 f(x) dx$.
3. Quelle est l'aire de la partie hachurée ? (On donnera un résultat en unités d'aire, arrondi au dixième).