Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 4 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée.
On s'intéresse dans ce problème à la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \frac{3}{e^{3x}+1}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{3e^{3x}}{e^{3x}+1}.$$

Déterminer une primitive G de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
(On pourra remarquer que la fonction g est de la forme $\frac{u'}{u}$ où u est une fonction que l'on précisera).

b. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) = 3 - \frac{3e^{3x}}{e^{3x}+1}$

c. Déterminer une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Soit a un réel strictement positif.
On note $\mathscr{A}(a)$ la mesure, exprimée en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$.

a. Exprimer $\mathscr{A}(a)$ à l'aide d'une intégrale.

b. Établir que $\mathscr{A}(a) = 3a - \ln\left(e^{3a}+1\right) + \ln 2$.

c. En remarquant que $3a = \ln\left(e^{3a}\right)$, écrire $\mathscr{A}(a)$ sous la forme du logarithme népérien d'un quotient ; déterminer alors la limite de $\mathscr{A}(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.