Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par : $f(x) = 1 + \ln(2x+1)$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Soit g la fonction définie pour tout réel x par : $g(x) = (x+1)\text{e}^{-x}$.

On note Γ la courbe représentative de g dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$F(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln(2x+1).$$

  a. Démontrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur cet intervalle.

  b. Calculer l'intégrale $I_1 = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\text{d}x$.

2. On considère la fonction G définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :
$G(x) = (-x-2)\text{e}^{-x}$.
On admet que la fonction G est une primitive de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.
Calculer l'intégrale $I_2 = \displaystyle\int_0^2 g(x)\,\text{d}x$.

3. **a.** Hachurer sur le graphique la partie $\mathscr{P}$ du plan délimitée par la courbe Γ, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

  b. Déterminer la valeur exacte de l'aire de la partie $\mathscr{P}$ exprimée en unités d'aire.