On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + 2 - \frac{3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de cette fonction dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
(Unités graphiques 2 cm)

1. Déterminer une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
On pourra remarquer que $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$ est de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

2. On note $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$.

a. Hachurer cette partie du plan.

b. On admet que la fonction f est positive sur $[-1\ ;\ 1]$. Écrire, à l'aide d'une intégrale, l'aire $\mathscr{A}$ exprimée en unités d'aire.

c. Montrer que $\ln(\mathrm{e} + 1) - \ln\left(\mathrm{e}^{-1} + 1\right) = 1$.

d. En déduire la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$.

3. On note $\mathscr{A}'$ l'aire de la partie du plan comprise entre la droite d'équation $y = \dfrac{1}{4}x + 2$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$, exprimée en unités d'aire. Montrer que $\mathscr{A}' = \mathscr{A}$.