Les objectifs de ce problème sont :

- l'étude de quelques propriétés d'une fonction f et de sa courbe représentative,
- un calcul d'aire entre deux courbes.

On considère les fonctions f et g définies, pour tout nombre réel x, par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + x^2 - x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - x + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f et $\mathscr{P}$ la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Démontrer que la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

2. Soit A la partie du plan limitée par les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$ où α est un nombre réel supérieur ou égal à 2.

a. Pour $\alpha \geqslant 2$ quelconque, déterminer l'aire de la partie A en fonction de α, en unités d'aire puis en cm^2.

b. Calculer $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \left(-\alpha\mathrm{e}^{-\alpha} - \mathrm{e}^{-\alpha} + 1\right)$.

c. Quelle est la limite de l'aire de A en cm^2 lorsque α tend vers $+\infty$?