Pour un jeu de hasard, on place dans un sac opaque cinq jetons numérotés de 1 à 5, indiscernables au toucher.

1. Lors d'une partie, un joueur pioche au hasard dans le sac un jeton qu'il place devant lui. Il pioche ensuite au hasard un second jeton qu'il place à droite du premier, formant ainsi un nombre de deux chiffres. Le premier jeton tiré indique donc le chiffre des dizaines et le second celui des unités.

a. À l'aide d'un arbre, écrire les 20 nombres qu'il est possible d'obtenir.

b. Soit M_2 l'évènement « le nombre obtenu est un multiple de 2 » et M_3 l'évènement « le nombre obtenu est un multiple de 3 ».

Démontrer que $P(M_2) = P(M_3)$.

c. Déterminer la probabilité de l'évènement A : « le nombre ohtenu est un multiple de 3 qui n'est ni un multiple de 2 ni un multiple de 5 ».

2. Un joueur doit miser 3 euros pour faire une partie.

Si le nombre obtenu est un multiple de 2, le joueur perçoit 2 euros.

Si le nombre obtenu est un multiple de 3,le joueur perçoit 3 euros.

Si le nombre obtenu est un multiple de 5, le joueur perçoit 5 euros.

Les sommes perçues sont cumulatives. (*Par exemple, si le joueur obtient le nombre* 45 *qui est à la fois un multiple de* 3 *et de* 5*, il perçoit* 8 *euros*).

On note X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain (positif ou négatif) finalement réalisé par le joueur en tenant compte de la mise initiale. (*Par exemple, si le joueur obtient le nombre* 45*, la variable aléatoire X prend la valeur* $8-3=5$).

a. Démontrer que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont -3 ; -1 ; 0 ; 2 et 5.

b. Démontrer que $P(X=0) = \dfrac{1}{10}$.

c. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

3. **a.** Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X.

b. Le jeu est-il équitable ?